〔1〕

Ⅰ.

問 1

すべり台の表面はなめらかだから，力学的エネルギーが保存される。

よって，$mg(H-h)=\frac{1}{2}mv^2 \quad \therefore v=\sqrt{2g(H-h)}$　・・・(答)

問 2

速度の鉛直成分の初速度は 0 だから，鉛直方向の運動は自由落下運動である。

よって，水平方向に飛び出してから台車上面に落下するまでの時間を t とすると，

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \quad \therefore t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

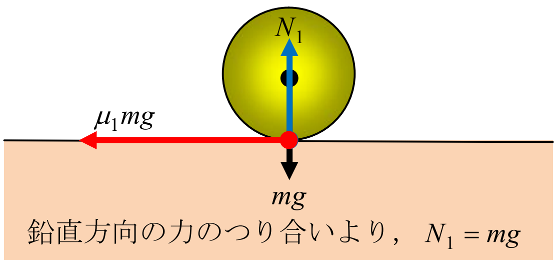
水平方向の運動は等速度運動だから，求める距離は，

$$\sqrt{2g(H-h)}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}=2\sqrt{h(H-h)}$$　・・・(答)

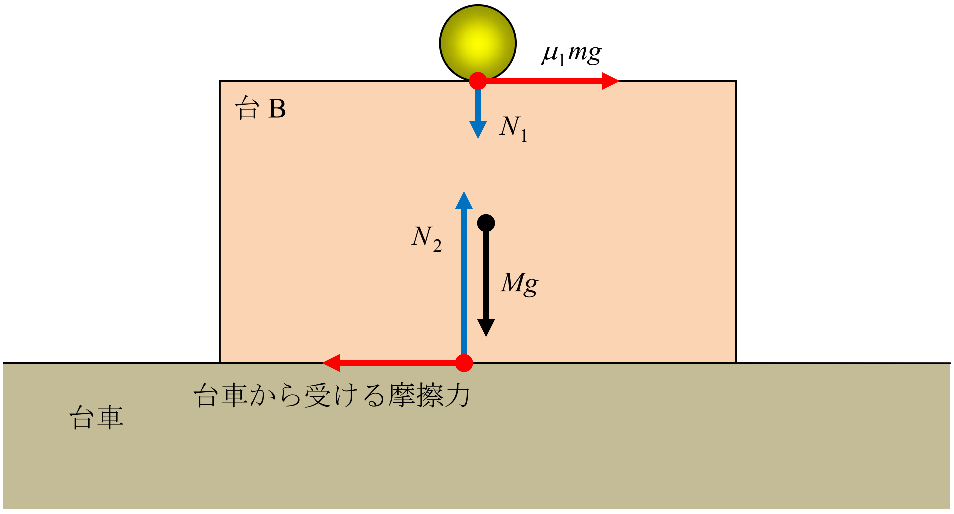
Ⅱ.

問 3

小物体 P に働く力



台 B に働く力



台 B が動き出すためには，台 B が小物体から受ける動摩擦力の大きさ $\mu_1 mg$ が台車から受ける最大摩擦力の大きさ $f_{\max}$ より大きくなければならない。

$f_{\max} = \mu_0 N_2$， $N_2 = Mg + N_1$， $N_1 = mg$ より， $f_{\max} = \mu_0 (m+M)g$

よって， $\mu_0 (m+M)g < \mu_1 mg$

$\therefore \mu_0 < \dfrac{m}{m+M}\mu_1$ ・・・(答)

台 B が動き出した直後，台 B は小物体と台車からそれぞれ大きさ $\mu_1 mg$ と大きさ $\mu_2 (m+M)g$ の動摩擦力を受ける。

よって，台 B の運動方程式は，

$Ma = \mu_1 mg - \mu_2 (m+M)g$

$\therefore a = \dfrac{\mu_1 m - \mu_2 (m+M)}{M} g$ ・・・(答)

問 4

台 B に対する小物体 P とは $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ のことであり，

地上の任意の点 O を基準にすると $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる。

速度，加速度，位置は地上を基準にするから，

このとき，

台 B に対する小物体 P の速度＝小物体 P の速度－台 B の速度

台 B に対する小物体 P の加速度＝小物体 P の加速度－台 B の加速度

台 B に対する小物体 P の変位＝小物体 P の変位－台 B の変位

右向きを正とすると，

台 B に対する小物体 P の初速度

$v_0 - 0 = v_0$ ・・・①

小物体 P が台 B からはなれる瞬間の台 B に対する速度

v_1 ・・・②

台 B に対する小物体 P の加速度

小物体 P の加速度は左向きだから負，台 B の加速度は右向きだから正

よって， $-\mu_1 g - a$ ・・・③

台 B に対する小物体 P の変位

小物体 P は台 B に対し右向きに l 移動するから， l ・・・④

①，②，③，④より，

$v_1^2 - v_0^2 = 2 \cdot (-\mu_1 g - a) \cdot l$

$\therefore v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2(\mu_1 g + a) \cdot l}$ ・・・(答)

問 5

①，②，③より，

$v_1 = v_0 + (-\mu_1 g - a)T$

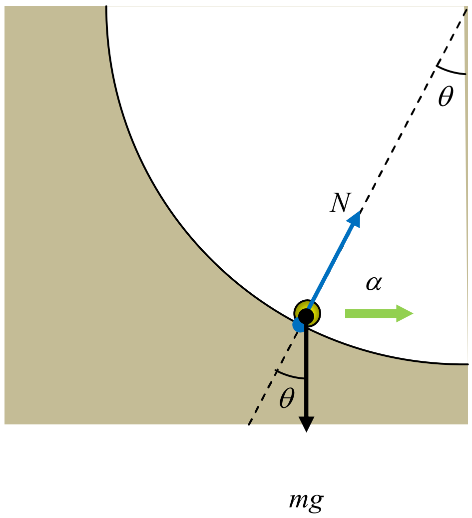
これと $v_1 = \sqrt{v_0{}^2 - 2(\mu_1 g + a)\cdot l}$ より，

$$T = \frac{v_0 - \sqrt{v_0{}^2 - 2(\mu_1 g + a)\cdot l}}{\mu_1 g + a} \quad ・・・(答)$$

Ⅲ.

問 6

地上の観測者が見た場合



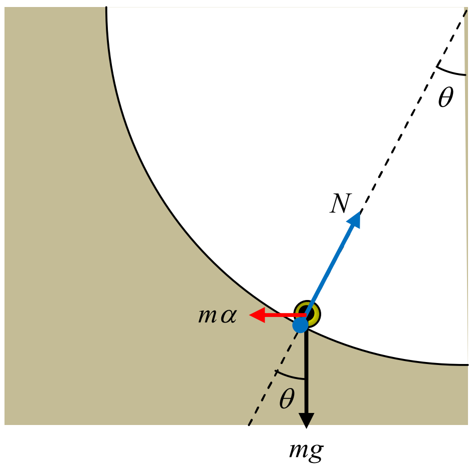
水平方向は，小物体 P の運動方程式となるから， $m\alpha = N\sin\theta$

鉛直方向は，垂直抗力の鉛直成分と重力の力のつり合いより， $N\cos\theta = mg$

よって， $m\alpha = \dfrac{mg}{\cos\theta}\sin\theta$

$\therefore \alpha = g\tan\theta$　・・・(答)

台車上の観測者が見た場合



静止しているから，力がつり合いの式になる。
力のつり合いを水平方向の力のつり合いと鉛直方向の力のつり合いの式に分けると，

$N\sin\theta = m\alpha$

$N\cos\theta = mg$

$\therefore \dfrac{N\sin\theta}{N\cos\theta} = \dfrac{\alpha}{g}$

$\therefore \alpha = g\tan\theta$　・・・(答)

問 7

台車上の観測者の立場で考える。

小物体 P は台車上で常に一定の力（慣性力と重力の合力）を

鉛直となす角 θ の向きに受けている。

したがって，この合力は台車上の観測者から見た小物体 P に働く保存力，

つまり小物体 P に働く見かけの重力にあたる。

そこで，この見かけの重力を mg' とすると，

この力は，問 6 の状況における垂直抗力 N とつり合うから，$mg' = N$

これと $N\cos\theta = mg$ より，$mg' = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

そこで，

円弧の表面がなめらかであることから，

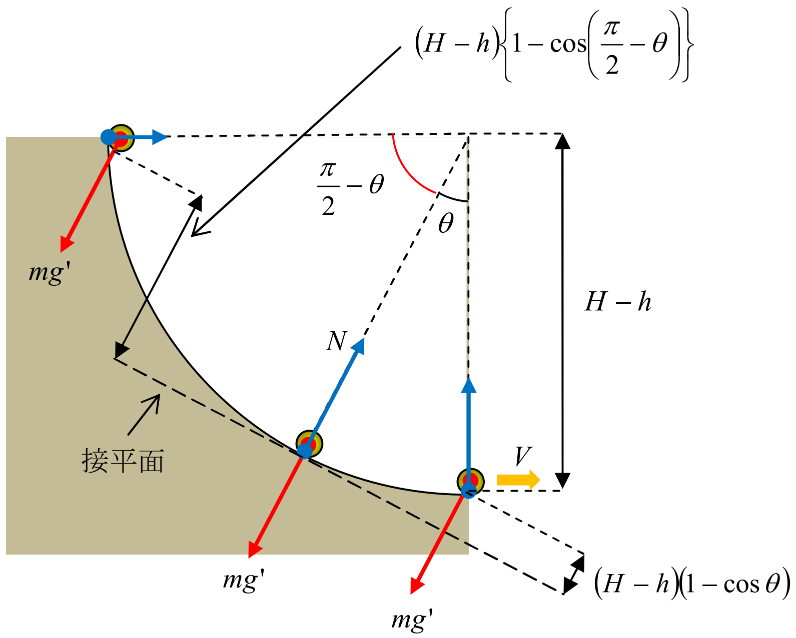
たとえば，つり合いの位置を接点とする円弧の接平面を高さの基準にでもし，

力学的エネルギー保存則を適用すればよい。

$$mg'(H-h)\left\{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\} = \frac{1}{2}mV^2 + mg'(H-h)(1-\cos\theta)$$

$$\therefore \frac{g}{\cos\theta}(H-h)(1-\sin\theta) = \frac{1}{2}V^2 + \frac{g}{\cos\theta}(H-h)(1-\cos\theta)$$

$$\therefore V = \sqrt{2g(H-h)(1-\tan\theta)} \quad ・・・（答）$$



問 8

V_0 と V_1 の関係について

飛び出した小物体 P の台車に対する加速度の水平成分は $-\alpha$ だから，
小物体が台車に衝突したときの台車に対する速度の水平成分を v，
台車に対する変位の水平成分を L とすると，

$$v^2 - {V_0}^2 = 2\cdot(-\alpha)\cdot L \quad ・・・⑤$$

衝突直後の台車に対する速度の水平成分も v だから，

$$V_1^{\,2} - v^2 = 2\cdot(-\alpha)\cdot(-L) \quad ・・・⑥$$

⑤＋⑥より，

$$V_1^{\,2} - {V_0}^2 = 0$$

よって，$V_1 = V_0$ ・・・⑦

小物体が台車に衝突したときの台車に対する速度の水平成分 v について

鉛直方向は自由落下運動だから，
小物体 P が飛び出してから台車に衝突するまでの時間を t_1 とすると，

$h = \dfrac{1}{2}g{t_1}^2$ より，$t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

よって，$v = V_0 - \alpha t_1 = V_0 - \alpha\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ ・・・⑧

V_1 の式

衝突前後の速度は大きさが同じで向きが逆，衝突前後の加速度は同じで，
再び飛び出した位置に速度 $-V_1$，すなわち $-V_0$ で戻るから，
戻るのにかかった時間も t_1，すなわち $\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ である。

よって，$-V_1 = v - \alpha\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ ・・・⑨

まとめ

⑦，⑧，⑨より $-V_0 = V_0 - 2\alpha\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ $\quad\therefore V_0 = V_1 = \alpha\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ ・・・(答)

補足

壁にボールが弾性衝突し元の位置に戻る運動と同じだから，
台車の面に垂直に衝突するときの速度の水平成分 $v = 0$ となるのは明らか。
したがって，それについて定性的に述べてから解答してもよいと思う。

〔2〕

Ⅰ.

(1)

求める電流をIとする。

コンデンサーを起電力V_{B}の電池と見なすと，$V_0+(-V_{\mathrm{B}})=RI$

$$\therefore I=\frac{1}{R}(V_0-V_{\mathrm{B}})$$

これと$V_{\mathrm{B}}=\dfrac{Q}{C_1}$より，$I=\dfrac{1}{R}\left(V_0-\dfrac{Q}{C_1}\right)$　・・・(答)

(2)

コンデンサーの電荷の変化を電圧変化から見ると，

$\Delta Q=C_1\Delta V_{\mathrm{B}}+C_1\Delta V_{\mathrm{B}}=2C_1\Delta V_{\mathrm{B}}$　・・・①

コンデンサーの電荷の変化を抵抗をコンデンサーに運ばれた電荷の大きさから見ると，

$\Delta Q=I\Delta t=\dfrac{1}{R}\left(V_0-\dfrac{Q}{C_1}\right)\Delta t$　・・・②

①，②より，

$$2C_1\Delta V_{\mathrm{B}}=\frac{1}{R}\left(V_0-\frac{Q}{C_1}\right)\Delta t$$

$\therefore \dfrac{\Delta V_{\mathrm{B}}}{\Delta t}=\dfrac{1}{2C_1R}\left(V_0-\dfrac{Q}{C_1}\right)$　・・・(答)

(3)

$\dfrac{\Delta V_{\mathrm{B}}}{\Delta t}$は$V_{\mathrm{B}}$の変化率を表している。

Qは経時的に増加していくから，$\dfrac{\Delta V_{\mathrm{B}}}{\Delta t}=\dfrac{1}{2C_1R}\left(V_0-\dfrac{Q}{C_1}\right)$は，

V_{B}の変化率が経時的に小さくなっていくことを示している。

よって，曲線は[a]である。

補足

曲線 a の式を求めてみる。

$\dfrac{\Delta V_{\mathrm{B}}}{\Delta t}=\dfrac{1}{2C_1R}\left(V_0-\dfrac{Q}{C_1}\right)$，$\dfrac{Q}{C_1}=V_{\mathrm{B}}$より，$\dfrac{\Delta V_{\mathrm{B}}}{\Delta t}=\dfrac{1}{2C_1R}(V_0-V_{\mathrm{B}})$

$$\therefore \frac{dV_{\mathrm{B}}}{dt}=\frac{1}{2C_1R}(V_0-V_{\mathrm{B}})$$

$$\frac{dV_{\mathrm{B}}}{V_0-V_{\mathrm{B}}}=\frac{1}{2C_1R}dt$$

$$\therefore \int \frac{dV_{\mathrm{B}}}{V_0 - V_{\mathrm{B}}} = \int \frac{1}{2C_1R}$$

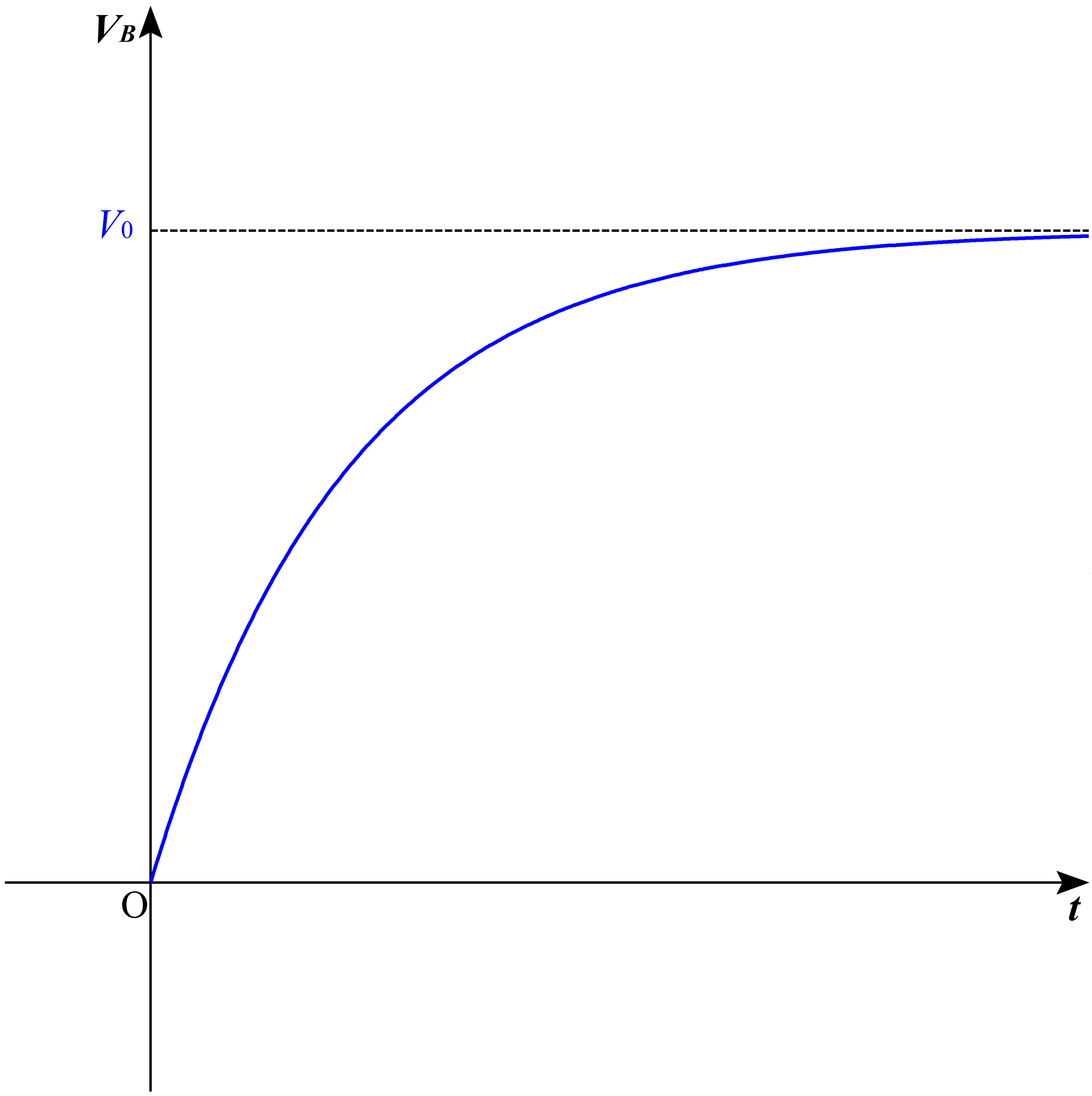
$V_0 - V_{\mathrm{B}} > 0$ より，積分定数を α とすると，$-\log(V_0 - V_{\mathrm{B}}) = \dfrac{t}{2C_1R} + \alpha$

$$\therefore V_0 - V_{\mathrm{B}} = e^{\frac{-t}{2C_1R} + \alpha} = e^{\alpha} \cdot e^{\frac{-t}{2C_1R}}$$

$t = 0$ のとき $V_{\mathrm{B}} = 0$ だから，$V_0 = e^{\alpha}$　　$\therefore V_0 - V_{\mathrm{B}} = V_0 \cdot e^{\frac{-t}{2C_1R}}$

よって，

$$V_{\mathrm{B}} = V_0\left(1 - e^{\frac{-t}{2C_1R}}\right)$$



Ⅱ.

(4)

F から G への回路の向きを電位降下と起電力の正の向きとする。

また，起電力は電池のみによるとすると，

この回路は起電力 0 の閉回路だから，

キルヒホッフの第 2 法則より，

$$0 = 2V_0 + \left(-L\frac{\Delta I}{\Delta t}\right)$$

$$\therefore \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{2V_0}{L} \quad ・・・(答)$$

(5)

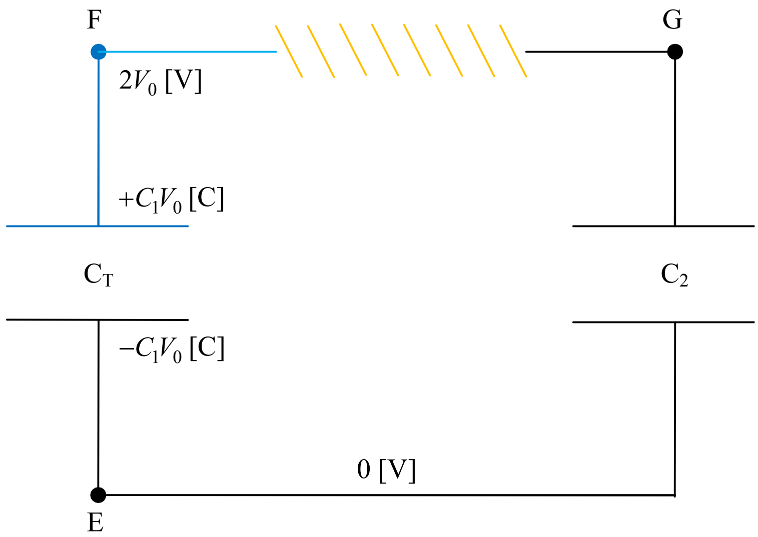
2 個のコンデンサーC_1 の合成容量を C_T とすると，

$\dfrac{1}{C_T} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_1}$ より， $C_T = \dfrac{C_1}{2}$

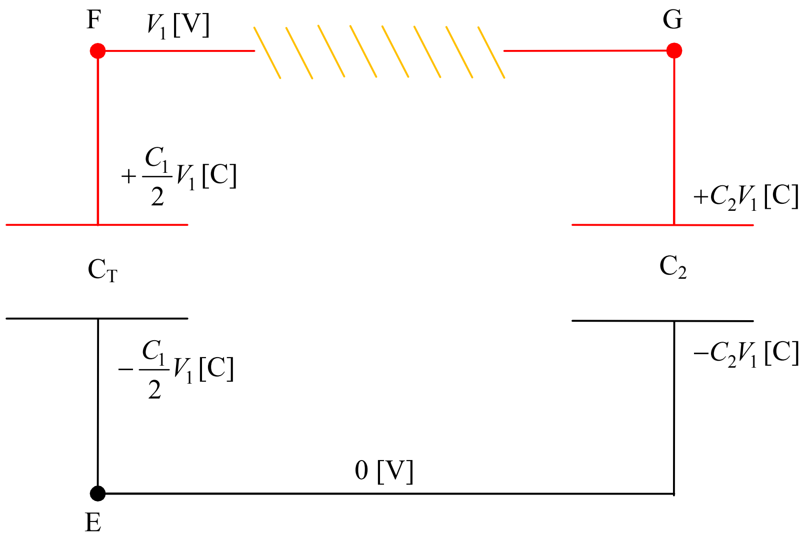
これをコンデンサーC_T とする。

すると，回路図は次のようにデフォルメできる。

$t = 0$ のとき



$t = t_1$ のとき



孤立部分の電荷は保存されるから,
赤色極板の電荷について

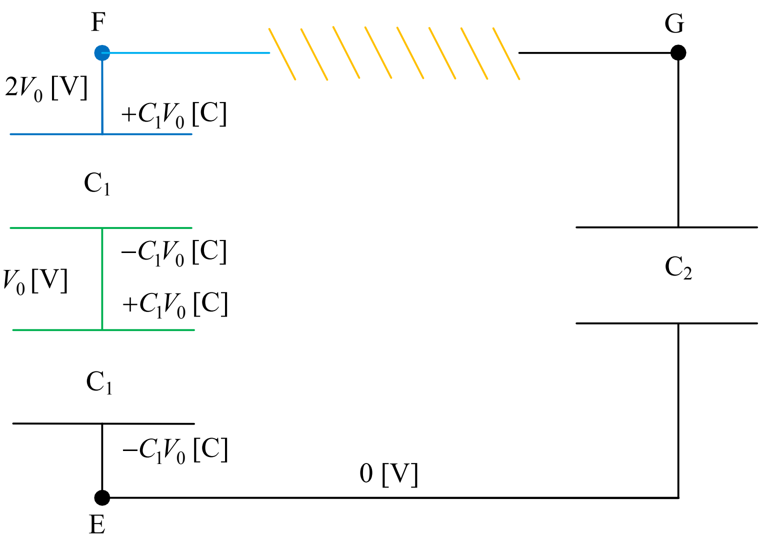
$$\frac{C_1}{2}V_1 + C_2V_1 = C_1V_0$$

$$\therefore V_1(C_1 + 2C_2) = 2C_1V_0$$

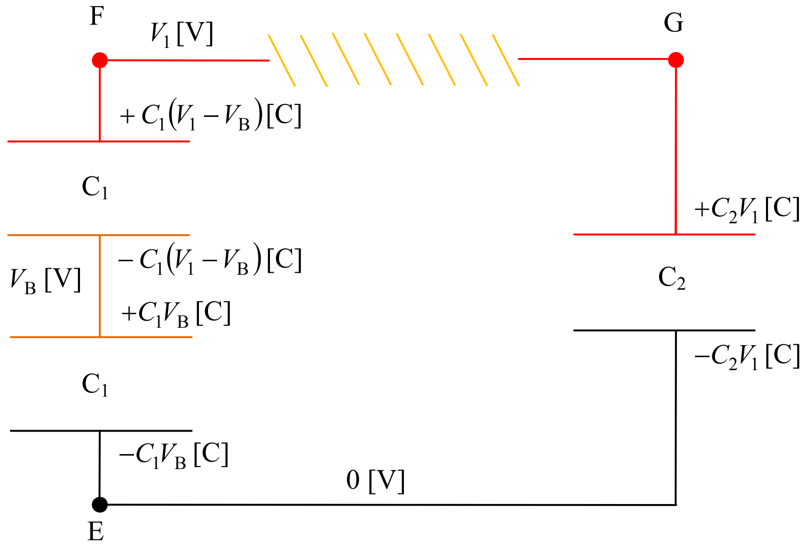
$$\therefore V_1 = \frac{2C_1}{C_1 + 2C_2}V_0 \quad \cdot\cdot\cdot(答)$$

合成容量を使わないで解くと

$t = 0$ のとき



$t = t_1$ のとき



孤立部分の電荷は保存されるから，

赤色極板の電荷について

$$C_1(V_1 - V_B) + C_2V_1 = C_1V_0$$

$$\therefore (C_1 + C_2)V_1 - C_1V_B = C_1V_0 \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

茶色極板の電荷について

$$-C_1(V_1 - V_B) + C_1V_B = 0$$

$$\therefore C_1(V_1 - 2V_B) = 0$$

$$\therefore V_1 = 2V_B \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

①，②より，

$$V_B = \frac{C_1}{C_1 + 2C_2}V_0$$

$$V_1 = \frac{2C_1}{C_1 + 2C_2}V_0 \quad \cdot\cdot\cdot (答)$$

(6)

$$\frac{1}{2}C_TV_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_1^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}C_2\right)V_1^2 = \frac{1}{4}(C_1 + 2C_2)V_1^2$$

$$\therefore \frac{1}{4}(C_1 + 2C_2)V_1^2 \quad \cdot\cdot\cdot (答)$$

(7)

$t=0$ と $t=t_1$ について，電気エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}C_1V_0{}^2+\frac{1}{2}C_1V_0{}^2=\frac{1}{4}(C_1+2C_2)V_1{}^2+\frac{1}{2}LI_{\max}{}^2$$

$V_1=\dfrac{2C_1}{C_1+2C_2}V_0$ より，

$$C_1V_0{}^2=\frac{C_1{}^2}{C_1+2C_2}V_0{}^2+\frac{1}{2}LI_{\max}{}^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}LI_{\max}{}^2=\frac{2C_1\cdot C_2}{C_1+2C_2}V_0{}^2$$

$$\therefore I_{\max}=2V_0\sqrt{\frac{C_1\cdot C_2}{L(C_1+2C_2)}}$$ ・・・(答)

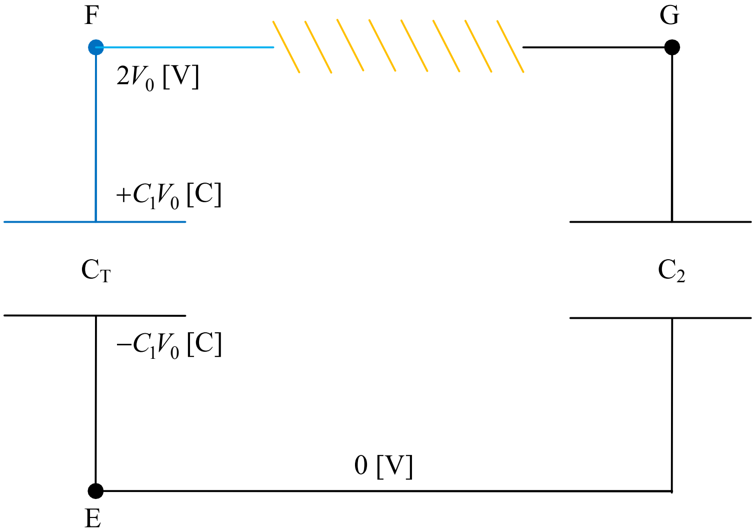
(8)

コンデンサー$C_1$1 個あたりに蓄えられる電気量と

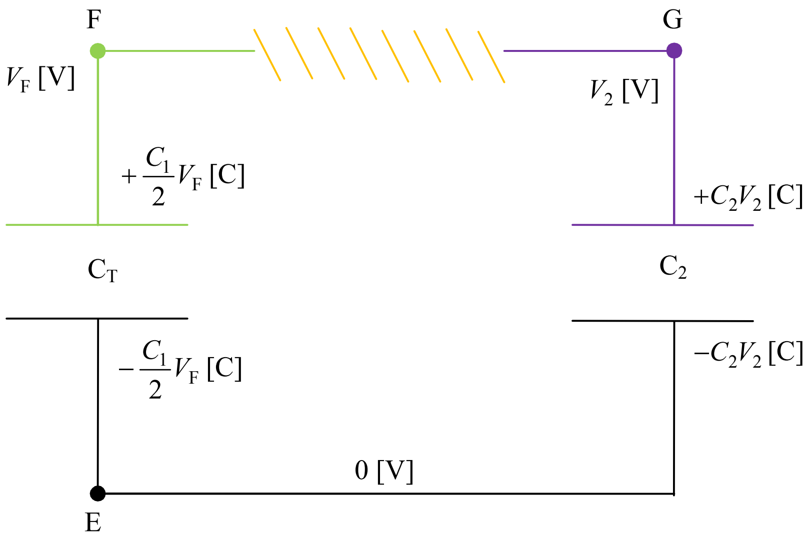
コンデンサーC_Tに蓄えられる電気量は等しいから，

コンデンサーC_Tの回路で考える。

$t=0$ のとき



$t = t_2$ のとき



孤立部分の電荷は保存されるから,

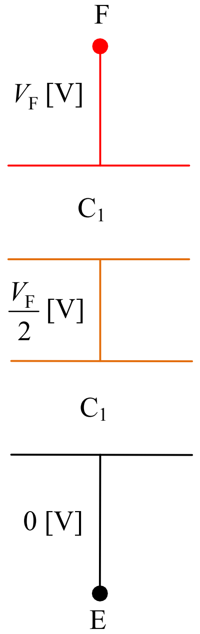
$$\frac{C_1}{2}V_F + C_2V_2 = C_1V_0 \qquad \therefore V_F = \frac{2}{C_1}\left(C_1V_0 - C_2V_2\right)$$

コンデンサーC_1 1 個あたりに蓄えられる電気量＝C_Tに蓄えられる電気量より,

$$\frac{C_1}{2}\left|V_F\right| = \left|C_1V_0 - C_2V_2\right| \quad ・・・(答)$$

補足

EF 間をコンデンサーC_1で表すと，次のようになる。



(9)

$t=0$ と $t=t_2$ について，電気エネルギー保存則より，

$$C_1{V_0}^2=\frac{1}{2}C_T{V_\mathrm{F}}^2+\frac{1}{2}C_2{V_2}^2$$

$C_T=\dfrac{C_1}{2}$， $V_\mathrm{F}=\dfrac{2}{C_1}\left(C_1V_0-C_2V_2\right)$ より，

$$C_1{V_0}^2=\frac{1}{2}\frac{C_1}{2}\left\{\frac{2}{C_1}\left(C_1V_0-C_2V_2\right)\right\}^2+\frac{1}{2}C_2{V_2}^2$$

$$C_1{V_0}^2=\frac{\left(C_1V_0-C_2V_2\right)^2}{C_1}+\frac{1}{2}C_2{V_2}^2$$

$$\therefore 2{C_1}^2{V_0}^2=2\left(C_1V_0-C_2V_2\right)^2+C_1C_2{V_2}^2$$

$$\therefore C_2V_2\left\{\left(2C_2+C_1\right)V_2-4C_1V_0\right\}=0$$

$V_2\neq 0$ より，

$$V_2=\frac{4C_1}{C_1+2C_2}V_0 \quad ・・・(答)$$

〔3〕

Ⅰ.

(1)

$(P+a)V_{\mathrm{A}}=n_{\mathrm{A}}RT$ ・・・①

$(P+a)(V_{\mathrm{A}}+\Delta V_{\mathrm{A}})=n_{\mathrm{A}}R(T+\Delta T)$ ・・・②

②－①より，

$(P+a)\Delta V_{\mathrm{A}}=n_{\mathrm{A}}R\Delta T$

$$\therefore \Delta V_{\mathrm{A}}=\frac{R}{P+a}n_{\mathrm{A}}\Delta T$$

$\therefore \dfrac{R}{P+a}$ ・・・(答)

(2)

風船が気体 B に対してした仕事＝$P\Delta V_{\mathrm{A}}$ ・・・③

内部の気体 A が風船にした仕事＝$(P+a)\Delta V_{\mathrm{A}}$ ・・・④

④－③より， $a\Delta V_{\mathrm{A}}$

$\therefore a$ ・・・(答)

(3)(4)

気体 B の仕事により，ピストンが体積$\Delta V_{\mathrm{A}}+\Delta V_{\mathrm{B}}$分変位するから，

気体 B がピストンに対してした仕事は,

$\Delta W=P(\Delta V_{\mathrm{A}}+\Delta V_{\mathrm{B}})=P\Delta V_{\mathrm{B}}+P\Delta V_{\mathrm{A}}$

よって，(3)(4)いずれも P ・・・(答)

(5)(6)

加えた熱量ΔQが，気体 A と気体 B と風船からなる系において,

気体の内部エネルギーの増加，ピストン（系外）に対してした仕事,

風船のゴムにたくわえられるエネルギーの増加に使われたから,

$$\begin{aligned}\Delta Q&=\frac{3}{2}R(n_{\mathrm{A}}+n_{\mathrm{B}})\Delta T+P(\Delta V_{\mathrm{A}}+\Delta V_{\mathrm{B}})+a\Delta V_{\mathrm{A}}\\&=\frac{3}{2}Rn_{\mathrm{A}}\Delta T+\frac{3}{2}Rn_{\mathrm{B}}\Delta T+(P+a)\Delta V_{\mathrm{A}}+P\Delta V_{\mathrm{B}}\\&=\frac{3}{2}Rn_{\mathrm{A}}\Delta T+\frac{3}{2}Rn_{\mathrm{B}}\Delta T+P_{\mathrm{A}}\Delta V_{\mathrm{A}}+P\Delta V_{\mathrm{B}}\\&=\frac{3}{2}Rn_{\mathrm{A}}\Delta T+\frac{3}{2}Rn_{\mathrm{B}}\Delta T+n_{\mathrm{A}}R\Delta T+n_{\mathrm{B}}R\Delta T\\&=\frac{5}{2}Rn_{\mathrm{B}}\Delta T+\frac{5}{2}Rn_{\mathrm{A}}\Delta T\end{aligned}$$

よって，(5)(6)いずれも$\dfrac{5}{2}R$ ・・・(答)

(7)

$(P+b-cV_{\mathrm{A}})V_{\mathrm{A}}=n_{\mathrm{A}}RT$ ・・・⑤

$\{p+b-c(V_{\mathrm{A}}+\Delta V_{\mathrm{A}}')\}(V_{\mathrm{A}}+\Delta V_{\mathrm{A}}')=n_{\mathrm{A}}R(T+\Delta T')$ ・・・⑥

⑥－⑤より，

$(P+b-2cV_{\mathrm{A}})\Delta V_{\mathrm{A}}'-c(\Delta V_{\mathrm{A}}')^2=n_{\mathrm{A}}RT'$

$(\Delta V_{\mathrm{A}}')^2$ の項は無視できるから，

$(P+b-2cV_{\mathrm{A}})\Delta V_{\mathrm{A}}'=n_{\mathrm{A}}RT'$

$\therefore \Delta T'=\dfrac{P+b-2cV_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{A}}R}\Delta V_{\mathrm{A}}'$

$\therefore P+b-2cV_{\mathrm{A}}$ ・・・（答）

(8)(9)

加えた熱量 ΔQ が，気体 A と気体 B と風船からなる系において，

気体の内部エネルギーの増加 $\dfrac{3}{2}R(n_{\mathrm{A}}+n_{\mathrm{B}})\Delta T'$，

ピストン（系外）に対してした仕事 $P(\Delta V_{\mathrm{A}}'+\Delta V_{\mathrm{B}}')$，

風船のゴムにたくわえられるエネルギーの増加 $P_{\mathrm{A}}\Delta V_{\mathrm{A}}'-P\Delta V_{\mathrm{A}}'$

に使われたから，

$$\begin{aligned}
\Delta Q'&=\frac{3}{2}R(n_{\mathrm{A}}+n_{\mathrm{B}})\Delta T'+P(\Delta V_{\mathrm{A}}'+\Delta V_{\mathrm{B}}')+P_{\mathrm{A}}\Delta V_{\mathrm{A}}'-P\Delta V_{\mathrm{A}}'\\
&=\frac{3}{2}Rn_{\mathrm{A}}\Delta T'+\frac{3}{2}Rn_{\mathrm{B}}\Delta T'+P\Delta V_{\mathrm{B}}'+P_{\mathrm{A}}\Delta V_{\mathrm{A}}'\\
&=\frac{3}{2}Rn_{\mathrm{A}}\Delta T'+\frac{3}{2}Rn_{\mathrm{B}}\Delta T'+n_{\mathrm{B}}R\Delta T'+P_{\mathrm{A}}\Delta V_{\mathrm{A}}'\\
&=\frac{5}{2}Rn_{\mathrm{B}}\Delta T'+\frac{3}{2}Rn_{\mathrm{A}}\Delta T'+P_{\mathrm{A}}\Delta V_{\mathrm{A}}'\\
&=\frac{5}{2}Rn_{\mathrm{B}}\Delta T'+\frac{3}{2}Rn_{\mathrm{A}}\Delta T'+(P+b-cV_{\mathrm{A}})\Delta V_{\mathrm{A}}'
\end{aligned}$$

ここで，(7)および $p_0=P+b-2cV_{\mathrm{A}}$ より， $\Delta T'=\dfrac{p_0}{n_{\mathrm{A}}R}\Delta V_{\mathrm{A}}'$ だから， $\Delta V_{\mathrm{A}}'=\dfrac{1}{p_0}Rn_{\mathrm{A}}\Delta T'$

$$\begin{aligned}
\therefore \Delta Q'&=\frac{5}{2}Rn_{\mathrm{B}}\Delta T'+\frac{3}{2}Rn_{\mathrm{A}}\Delta T'+(P+b-cV_{\mathrm{A}})\frac{R}{p_0}Rn_{\mathrm{A}}\Delta T'\\
&=\frac{5}{2}Rn_{\mathrm{B}}\Delta T'+\left(\frac{3}{2}R+\frac{(P+b-cV_{\mathrm{A}})R}{p_0}\right)n_{\mathrm{A}}\Delta T'
\end{aligned}$$

よって，

(8)の答： $\dfrac{5}{2}R$

(9)の答： $(P+b-cV_{\mathrm{A}}R)$

(10)

$$C_{\mathrm{I}} = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{5}{2}R\left(n_{\mathrm{A}} + n_{\mathrm{B}}\right)$$

$$C_{\mathrm{II}} = \frac{\Delta Q'}{\Delta T'} = \frac{5}{2}Rn_{\mathrm{B}} + \frac{3}{2}Rn_{\mathrm{A}} + \frac{P + b - cV_{\mathrm{A}}}{p_0}Rn_{\mathrm{A}}$$

$$\therefore C_{\mathrm{II}} - C_{\mathrm{I}} = \left(\frac{P + b - cV_{\mathrm{A}}}{P + b - 2cV_{\mathrm{A}}} - 1\right)Rn_{\mathrm{A}} > 0$$

よって，（ア）